

# Bí Kíp Bất Đẳng Thức Như Lai Thân Trưởng

Version 1.0 Super Kill

## I, Giới thiệu

Chào các em, khi các em đang đọc những dòng này là trên tay các em đang sở hữu tâm pháp công phá Bất Đẳng Thức đề THPT Quốc Gia bằng máy tính fx – 570 es, vn, vinacal plus. Bất Đẳng Thức luôn là một câu khó nhất trong đề Đại Học và số lượng 10 điểm hằng năm cũng không có nhiều, thế nhưng không có nghĩa là chúng ta từ bỏ, và đặc biệt là làm Toán rất dư thời gian kể cả là khi soát xong, vậy nên tại sao chúng ta không dành thời gian dư đó để kiểm thêm 0,25-0,5 điểm với học sinh khá, còn khá cứng thì hạ gục nó luôn.

Với tư cách là 1 người đi trước, đã từng được 10 môn Toán đề khối B năm 2013, hôm nay thì anh xin được chia sẻ những thủ thuật, những “mánh” của anh để chinh phục BĐT, và bất bí thêm là cấp 3 anh cũng học 1 trường bình thường của Huyện chứ không phải trường chuyên lớp chọn gì mà còn làm được BDT.

Bí kíp này là 1 trong 4 bí kíp anh đã phát về môn Toán, trước khi đọc bí kíp này các em nên đọc thêm về Bí Kíp Hệ và Phương Trình, Bất phương trình để làm quen và vững chắc hơn.

## II, Yêu cầu

1. Có thái độ học tập chăm chỉ, cần cù, không từ bỏ và tự tin vào bản thân
2. Có 1 chiếc máy tính cầm tay fx 570 es hoặc vn, vinacal

## III, Nội dung

### Phần 1 : Các kiến thức cơ bản cần nắm vững

#### 1. Bất đẳng thức Cô-si cho 2 và 3 số không âm :

Đánh giá tổng với tích :  $x + y \geq 2\sqrt{xy}$   $x + y + z \geq 3\sqrt[3]{xyz}$

Dạng phân số:  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$   $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{9}{x+y+z}$

Tổng và tổng bình phương:  $2(x^2 + y^2) \geq (x + y)^2 \geq 4xy$   $3(x^2 + y^2 + z^2) \geq (x + y + z)^2 \geq 9xyz$

Dấu “=” xảy ra tại  $x = y$

Trong Bất đẳng thức này cần chú ý tới “Điểm rơi là dấu “=” xảy ra tại đâu điều này rất quan trọng để khi ta ghép cho đúng. Và BDT này có trong sách giáo khoa lớp 10 do đó mà ta không cần phải chứng minh thêm và trong những năm gần đây BDT này càng được sử dụng nhiều trong đề thi thử và ĐH.

#### 2. Một số bất đẳng thức phụ cần biết:

Với  $ab \geq 1$  thì  $\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} \geq \frac{2}{1+ab}$  với  $ab < 1$  thì bất đẳng thức đổi chiều, dấu “=” xảy ra khi  $a=b=1$

#### 3. Phân tích cấu trúc bài Bất Đẳng Thức trong đề Đại Học

#### Trích câu 10 đề Toán THPT QG 2016 :

Cho các số thực  $a, b, c$  thuộc đoạn  $[1; 3]$  và thỏa mãn điều kiện  $a + b + c = 6$ . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \frac{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 12abc + 72}{ab + bc + ca} - \frac{1}{2}abc$$

$$\text{Tóm tắt bài toán: } \left\{ \begin{array}{l} a, b, c \in [1; 3] \\ a + b + c = 6 \\ P = \frac{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 12abc + 72}{ab + bc + ca} - \frac{1}{2}abc \end{array} \right. \rightarrow P_{\max} = ?$$

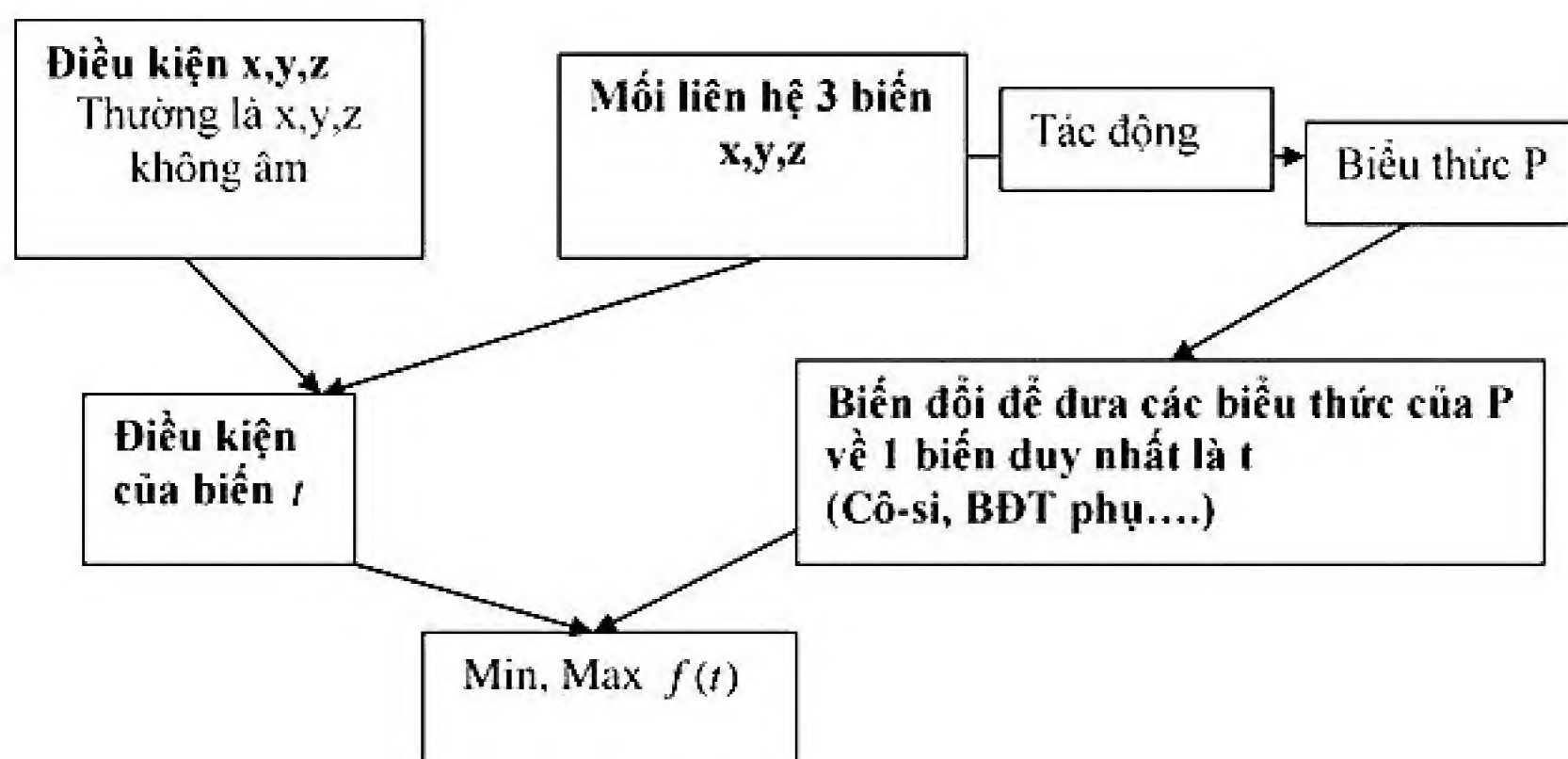
Rõ ràng thường thì các bài BDT thi ĐH đều là 3 biến và họ thường cho không âm để các em có thể sử dụng Cô-si, bên cạnh đó thì họ cho 1 biểu thức liên hệ giữa 3 biến ở đây là  $a + b + c = 6$

Điều kiện này có 2 chức năng quan trọng sau :

- + Một là để đánh giá, biến đổi để đưa P thành 1 hàm duy nhất với 1 biến duy nhất là  $P = f(t)$
- + Hai là để tìm điều kiện của biến  $t$  từ đó mới xét hàm được

#### 4. Hướng làm 1 bài Bất Đẳng thức:





Mục tiêu của toàn bộ quy trình này là dồn từ 3 biến về 1 biến sử dụng các biến đổi tương đương hay bất đẳng thức cô, si hay BDT phụ từ đó đưa P về 1 hàm số duy nhất, tiếp đó thì ta tìm điều kiện của biến và xét hàm là xong.  
Đây là xu hướng chung các năm gần đây, và BGD thường cho dấu = 3 biến lệch nhau chứ không cho  $x = y = z$  đâu như vậy mới hay và khó.

### 5. Vai trò của máy và cơ sở của phương pháp.

Nhiều bạn tự hỏi anh nói từ này tới giờ thì em máy ở đây có tác dụng gì?

Máy tính ở đây có tác dụng là tìm ra dấu "=" khi P đạt Max hay Min thì x, y, z bằng bao nhiêu? Từ đó ta dự đoán cách dồn biến để biến đổi P về biến đó, và điều quan trọng thứ 2 là để ta chắc chắn mỗi dấu = khi ta ghép các biến với nhau để không xảy ra tình trạng đánh giá không đúng

Ví dụ nhé, thường thấy xyz thì ta có các đánh giá sau:

$x + y + z \geq 3\sqrt[3]{xyz}$  ở đây thì dấu "=" xảy ra tại  $x = y = z$

Nhưng vấn đề là ở chỗ, khi ta bấm máy ra được kết quả P Max thì  $x = 3, y = 2, z = 1$  cơ

Thì khi đó ta lại sử dụng đánh giá khác  $(x-2) + (y-1) + z \geq 3\sqrt[3]{(x-2)(y-1)z}$

Do đó mà việc biết dấu "=" của x,y,z tại đâu vô cùng lợi hại và quan trọng.

**\*Cơ sở của phương pháp:** Làm cách nào mà ta có thể tìm được dấu "=" ??? Biểu thức kia 3 biến cơ mà?

Ta sẽ dễ dàng đưa P về 2 biến nhờ mối liên hệ giữa 3 biến và thật tình cờ và bất ngờ ta được hàm 2 biến lúc này ta chỉ việc coi 1 biến là tham số và 1 biến là ẩn chính.

Và khảo sát, đối với Đồn Long Casio ngoài tuyệt chiêu Solve thì skill Table trong trường hợp này áp dụng vô cùng tốt vào việc khảo sát giá trị hàm trên 1 đoạn.

**Chúng ta sẽ cùng sang các ví dụ và phân tích cụ thể.**

**Loại 1: Đồn 3 biến thành 1 biến duy nhất**

Đây thường là dạng khó, vì phải đánh giá cùng 1 lúc cả 3 biến nhưng nó lại có 1 cách làm chung, dấu hiệu nhận biết thường gồm đầy đủ điều kiện, mối liên hệ 3 biến và các biến không đối xứng cho lắm tức là a, b có thể đổi chỗ cho nhau nhưng a và c thì không

Mở mà là lễ thành hôn của boy cô đơn Casio và gái xinh 2016 miss BDT :



**Bài 1 (THPT QG – 2015):** Cho các số thực  $a, b, c$  thuộc đoạn  $[1; 3]$  và thỏa mãn điều kiện  $a + b + c = 6$ .

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \frac{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 12abc + 72}{ab + bc + ca} - \frac{1}{2}abc$$

**Phân tích:**

Nhìn vào bài này, nhiều em thấy ngay  $a, b, c$  đối xứng tức là thay đổi vai trò được cho nhau và Gia Cát Dự

$a = b = c = 2 \in [1; 3]$  thấy rất là hợp lý, và cứ hồn nhiên đánh giá với dấu “=” như vậy, kaka

Và mọi sự cố gắng để đồ suông xông xuống bể.

Đầu tiên, ta sẽ thế  $c = 6 - a - b$  vào  $P$  để được biểu thức có 2 ẩn  $a, b$

Ý tưởng: Ta sẽ cho  $a$  chạy từ 1 tới 3 và  $b$  cố định để xem  $P$  tăng lên hay giảm đi, có giá trị nào đẹp không?

Sau đó ta lại tăng  $b$  lên và cho  $a$  chạy xem có cái nào đẹp không :D

**\*Ban đầu**

Chọn  $a = X, b = 1, c = 5 - X$  ta có:

$$P = \frac{X^2 + (1 + X^2)(5 - X)^2 + 12X(5 - X) + 72}{X + (1 + X)(5 - X)} - \frac{X(5 - X)}{2}$$

Các em chú ý là nên viết gọn biểu thức  $P$  lại  $b^2c^2 + c^2a^2 = c^2(a^2 + b^2)$  để đỡ tốn kí tự đề phòng bị đầy kí tự

Sau đó các em bấm **Mode 7** để vào tính năng **Table**

**Sau đó nhập hàm**

$$f(x) = \frac{X^2 + (1 + X^2)(5 - X)^2 + 12X(5 - X) + 72}{X + (1 + X)(5 - X)} - \frac{X(5 - X)}{2}$$

Đối với máy 570 es plus thì chỉ có hàm  $f(x)$  còn riêng 570 vn plus thì có thêm hàm  $g(x)$

Em nào dùng 570 vn plus thì nhập

Với  $a = X, b = 2, c = 4 - X$

$$g(x) = \frac{4X^2 + (4 + X^2)(4 - X)^2 + 12.2.X(4 - X) + 72}{2X + (2 + X)(4 - X)} - \frac{2X(4 - X)}{2}$$

Với máy 570es plus không có  $g(x)$  thì tí nhập lại Với **Start** 1 = End 2.9 = và **Step** 0,1 =

Trong bí kíp này anh hướng dẫn theo máy 570 vn plus bởi nó có 2 bảng rất tiện lợi cho việc so sánh các giá trị và đẩy mạnh tốc độ lên 2 lần

**Giải thích:** Table là 1 hàm thống kê giá trị của hàm số theo giá trị của biến, với **Start** là giá trị khởi đầu của biến, **End** là giá trị kết thúc, trong đó **Step** là bước nhảy là khoảng cách giữa 2 giá trị liên tiếp của biến

Và ghi nhớ 1 điều Table chỉ có thể tính tối đa **30 giá trị**.

Mà từ 1 tới 3 là 31 giá trị do có thêm số 0 nên ta chỉ cần tính từ 1 tới 2.9 em nào cần thận thì tính nốt 3 nữa



Chúng ta sẽ thu được kết quả như sau:

1	X	F(X)	G(X)
2	1.1	14.895	14.545
3	1.2	14.811	14.338
4	1.3	14.744	14.255
5	1.4	14.691	14.185
6	1.5	14.649	14.127
7	1.6	14.616	14.081
8	1.7	14.591	14.045
9	1.8	14.571	14.021
10	1.9	14.556	14.005
11	2.0	14.545	14.000
12	2.1	14.537	14.005
13	2.2	14.531	14.021
14	2.3	14.527	14.045
15	2.4	14.525	14.081
16	2.5	14.525	14.127
17	2.6	14.525	14.185
18	2.7	14.527	14.255
19	2.8	14.531	14.338
20	2.9	14.537	14.434
21	3.0	14.545	14.545
22	3.1	14.556	14.649
23	3.2	14.571	14.744
24	3.3	14.591	14.811
25	3.4	14.595	14.895
26	3.5	14.600	14.945
27	3.6	14.605	14.981
28	3.7	14.611	15.000
29	3.8	14.617	15.011
30	3.9	14.623	15.021
31	4.0	14.629	15.031
32	4.1	14.635	15.041
33	4.2	14.641	15.051
34	4.3	14.647	15.061
35	4.4	14.653	15.071
36	4.5	14.659	15.081
37	4.6	14.665	15.091
38	4.7	14.671	15.101
39	4.8	14.677	15.111
40	4.9	14.683	15.121
41	5.0	14.689	15.131
42	5.1	14.695	15.141
43	5.2	14.701	15.151
44	5.3	14.707	15.161
45	5.4	14.713	15.171
46	5.5	14.719	15.181
47	5.6	14.725	15.191
48	5.7	14.731	15.201
49	5.8	14.737	15.211
50	5.9	14.743	15.221
51	6.0	14.749	15.231
52	6.1	14.755	15.241
53	6.2	14.761	15.251
54	6.3	14.767	15.261
55	6.4	14.773	15.271
56	6.5	14.779	15.281
57	6.6	14.785	15.291
58	6.7	14.791	15.301
59	6.8	14.797	15.311
60	6.9	14.803	15.321
61	7.0	14.809	15.331
62	7.1	14.815	15.341
63	7.2	14.821	15.351
64	7.3	14.827	15.361
65	7.4	14.833	15.371
66	7.5	14.839	15.381
67	7.6	14.845	15.391
68	7.7	14.851	15.401
69	7.8	14.857	15.411
70	7.9	14.863	15.421
71	8.0	14.869	15.431
72	8.1	14.875	15.441
73	8.2	14.881	15.451
74	8.3	14.887	15.461
75	8.4	14.893	15.471
76	8.5	14.899	15.481
77	8.6	14.905	15.491
78	8.7	14.911	15.501
79	8.8	14.917	15.511
80	8.9	14.923	15.521
81	9.0	14.929	15.531
82	9.1	14.935	15.541
83	9.2	14.941	15.551
84	9.3	14.947	15.561
85	9.4	14.953	15.571
86	9.5	14.959	15.581
87	9.6	14.965	15.591
88	9.7	14.971	15.601
89	9.8	14.977	15.611
90	9.9	14.983	15.621
91	10.0	14.989	15.631
92	10.1	14.995	15.641
93	10.2	15.001	15.651
94	10.3	15.007	15.661
95	10.4	15.013	15.671
96	10.5	15.019	15.681
97	10.6	15.025	15.691
98	10.7	15.031	15.701
99	10.8	15.037	15.711
100	10.9	15.043	15.721
101	11.0	15.049	15.731
102	11.1	15.055	15.741
103	11.2	15.061	15.751
104	11.3	15.067	15.761
105	11.4	15.073	15.771
106	11.5	15.079	15.781
107	11.6	15.085	15.791
108	11.7	15.091	15.801
109	11.8	15.097	15.811
110	11.9	15.103	15.821
111	12.0	15.109	15.831
112	12.1	15.115	15.841
113	12.2	15.121	15.851
114	12.3	15.127	15.861
115	12.4	15.133	15.871
116	12.5	15.139	15.881
117	12.6	15.145	15.891
118	12.7	15.151	15.901
119	12.8	15.157	15.911
120	12.9	15.163	15.921
121	13.0	15.169	15.931
122	13.1	15.175	15.941
123	13.2	15.181	15.951
124	13.3	15.187	15.961
125	13.4	15.193	15.971
126	13.5	15.199	15.981
127	13.6	15.205	15.991
128	13.7	15.211	16.001
129	13.8	15.217	16.011
130	13.9	15.223	16.021
131	14.0	15.229	16.031
132	14.1	15.235	16.041
133	14.2	15.241	16.051
134	14.3	15.247	16.061
135	14.4	15.253	16.071
136	14.5	15.259	16.081
137	14.6	15.265	16.091
138	14.7	15.271	16.101
139	14.8	15.277	16.111
140	14.9	15.283	16.121
141	15.0	15.289	16.131
142	15.1	15.295	16.141
143	15.2	15.301	16.151
144	15.3	15.307	16.161
145	15.4	15.313	16.171
146	15.5	15.319	16.181
147	15.6	15.325	16.191
148	15.7	15.331	16.201
149	15.8	15.337	16.211
150	15.9	15.343	16.221
151	16.0	15.349	16.231
152	16.1	15.355	16.241
153	16.2	15.361	16.251
154	16.3	15.367	16.261
155	16.4	15.373	16.271
156	16.5	15.379	16.281
157	16.6	15.385	16.291
158	16.7	15.391	16.301
159	16.8	15.397	16.311
160	16.9	15.403	16.321
161	17.0	15.409	16.331
162	17.1	15.415	16.341
163	17.2	15.421	16.351
164	17.3	15.427	16.361
165	17.4	15.433	16.371
166	17.5	15.439	16.381
167	17.6	15.445	16.391
168	17.7	15.451	16.401
169	17.8	15.457	16.411
170	17.9	15.463	16.421
171	18.0	15.469	16.431
172	18.1	15.475	16.441
173	18.2	15.481	16.451
174	18.3	15.487	16.461
175	18.4	15.493	16.471
176	18.5	15.499	16.481
177	18.6	15.505	16.491
178	18.7	15.511	16.501
179	18.8	15.517	16.511
180	18.9	15.523	16.521
181	19.0	15.529	16.531
182	19.1	15.535	16.541
183	19.2	15.541	16.551
184	19.3	15.547	16.561
185	19.4	15.553	16.571
186	19.5	15.559	16.581
187	19.6	15.565	16.591
188	19.7	15.571	16.601
189	19.8	15.577	16.611
190	19.9	15.583	16.621
191	20.0	15.589	16.631
192	20.1	15.595	16.641
193	20.2	15.601	16.651
194	20.3	15.607	16.661
195	20.4	15.613	16.671
196	20.5	15.619	16.681
197	20.6	15.625	16.691
198	20.7	15.631	16.701
199	20.8	15.637	16.711
200	20.9	15.643	16.721
201	21.0	15.649	16.731
202	21.1	15.655	16.741
203	21.2	15.661	16.751
204	21.3	15.667	16.761
205	21.4	15.673	16.771
206	21.5	15.679	16.781
207	21.6	15.685	16.791
208	21.7	15.691	16.801
209	21.8	15.697	16.811
210	21.9	15.703	16.821
211	22.0	15.709	16.831
212	22.1	15.715	16.841
213	22.2	15.721	16.851
214	22.3	15.727	16.861
215	22.4	15.733	16.871
216	22.5	15.739	16.881
217	22.6	15.745	16.891
218	22.7	15.751	16.901
219	22.8	15.757	16.911
220	22.9	15.763	16.921
221	23.0	15.769	16.931
222	23.1	15.775	16.941
223	23.2	15.781	16.951
224	23.3	15.787	16.961
225	23.4	15.793	16.971
226	23.5	15.799	16.981
227	23.6	15.805	16.991
228	23.7	15.811	17.001
229	23.8	15.817	17.011
230	23.9	15.823	17.021
231	24.0	15.829	17.031
232	24.1	15.835	17.041
233	24.2	15.841	17.051
234	24.3	15.847	17.061
235	24.4	15.853	17.071
236	24.5	15.859	17.081
237	24.6	15.865	17.091
238	24.7	15.871	17.101
239	24.8	15.877	17.111
240	24.9	15.883	17.121
241	25.0	15.889	17.131
242	25.1	15.895	17.141
243	25.2	15.901	17.151
244	25.3	15.907	17.161
245	25.4	15.913	17.171
246	25.5	15.919	17.181
247	25.6	15.925	17.191
248	25.7	15.931	17.201
249	25.8	15.937	17.211
250	25.9	15.943	17.221
251	26.0	15.949	17.231
252	26.1	15.955	17.241
253	26.2	15.961	17.251
254	26.3	15.967	17.261
255	26.4	15.973	17.271
256	26.5	15.979	17.281
257	26.6	15.985	17.291
258	26.7	15.991	17.301
259	26.8	15.997	17.311
260	26.9	16.003	17.321
261	27.0	16.009	17.331
262	27.1	16.015	17.341
263	27.2	16.021	17.351
264	27.3	16.027	17.361
265	27.4	16.033	17.371
266	27.5	16.039	17.381
267	27.6	16.045	17.391
268	27.7	16.051	17.401
269	27.8	16.057	17.411
270	27.9	16.063	17.421
271	28.0	16.069	17.431
272	28.1	16.075	17.441
273	28.2	16.081	17.451
274	28.3	16.087	17.4



Bí kíp giải Bất Đẳng Thức bằng Casio fx 570 es,vn,vinacal plus

Chuyên đề đặc biệt

$$a, b, c \in [1; 3] \Leftrightarrow \begin{cases} (a-1)(b-1)(c-1) \geq 0 \\ (3-a)(3-b)(3-c) \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} abc - (ab + bc + ca) + (a + b + c) - 1 \geq 0 \\ 3(ab + bc + ca) - abc - 9(a + b + c) + 27 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ab + bc + ca \leq abc + 5 \\ 3(ab + bc + ca) \geq abc + 27 \end{cases} \Rightarrow 2(ab + bc + ca) \geq 22 \Leftrightarrow ab + bc + ca \geq 11$$

Vậy ở đây các em đặt  $t = ab + bc + ca$  hoặc  $t = abc$  đều được

Đặt  $t = ab + bc + ca$

Ta mới chặn dưới nó, giờ phải chặn trên nữa

**Theo Cô-si ta có :**  $36 = (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) \geq 3(ab + bc + ca) \rightarrow t \leq 12$  vậy  $t \in [11; 12]$

Chỗ này tìm thêm thôi chứ dấu "=" chỗ này là  $a = b = c$  nhưng bài toán là  $t = 11$  chứ không phải  $t = 12$  nên không sao cả.

Tới đây mới được 0,25 thôi nhé , chỗ xử lý điều kiện là phải có kinh nghiệm

Ta đã biết là dấu bằng xảy ra tại đầu mút  $t = 11$  giờ ép về cái hàm luôn nghịch biến là xong

$$P = \frac{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 12abc + 72}{ab + bc + ca} - \frac{abc}{2} \text{ biến đổi về ẩn } t$$

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \text{ làm ta nghĩ về } (ab + bc + ca)^2 = a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 2abc(a + b + c) = a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 12abc$$

Bổ sung cho đẹp

$$\rightarrow \frac{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 12abc + 72}{ab + bc + ca} = \frac{t^2 + 72}{t}$$

$$\rightarrow \frac{abc}{2} \geq \frac{(ab + bc + ca) - 5}{2} = \frac{t - 5}{2}$$

$$\text{Vậy : } P = \frac{t^2 + 72}{t} - \frac{abc}{2} \leq \frac{t^2 + 72}{t} - \frac{t - 5}{2} = f(t) \text{ với } t \in [11; 12] \text{ thôi giờ đạo hàm là xong.....}$$

$$f'(t) = \frac{t^2 - 144}{2t^2} \leq 0 \forall t \in [11; 12] \rightarrow P \leq f(t) \leq f(11) = \frac{160}{11} \rightarrow P_{\max} = \frac{160}{11} \text{ khi } a = 1, b = 2, c = 3 \text{ và các hoán vị của}$$

bọn chúng.

**Nhận xét:** Đây là 1 bài chuẩn mực sử dụng tuyệt chiêu Casio để tìm dấu "=" của BDT và từ đó định hướng bài làm, công cụ này hỗ trợ tăng 66% nội công cho các sĩ tử để chiến thắng trong cuộc chiến giành điểm 10 và trong đó 33% còn lại là kiến thức, kinh nghiệm tích lũy được và dĩ nhiên 1% là sự may mắn

Tiếp theo ta sang:

**Bài 2 ( A – 2014 ):** Cho  $x, y, z$  là các số thực không âm và thỏa mãn điều kiện  $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ .

Tính giá trị lớn nhất của biểu thức.

$$P = \frac{x^2}{x^2 + yz + x + 1} + \frac{y + z}{x + y + z + 1} - \frac{1 + yz}{9}$$

**Phân tích:**

## Bí kíp giải Bất Đẳng Thức bằng Casio fx 570 es,vn,vinacal plus

## Chuyên đề đặc biệt

Dạng của bài này cũng tương tự bài trước, năm 2014 phân khối và đề khối A là khó nhất rồi, bài này thì vẫn dạng như bài kia nhưng cứng hơn 1 chút.

$$\begin{cases} x, y, z \geq 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z = \sqrt{2 - x^2 - y^2} \\ x, y, z \leq \sqrt{2} \approx 1,414 < 1,5 \end{cases}$$

Ở bài này các em lưu ý biểu thức P dài, anh đã bấm thử và không đủ số kí tự, vì máy tối đa là được khoảng 80 kí tự thôi những kí tự như bình phương hay căn và phân số khá là tốn bộ nhớ.

Nên bài này ta phải viết gọn :  $\frac{y+z}{x+y+z+1} = 1 - \frac{x+1}{x+y+z+1}$  thay vì để  $\frac{y+\sqrt{2-x^2-y^2}}{x+y+\sqrt{2-x^2-y^2}+1}$

- Với  $x = X, y = 0, z = \sqrt{2 - X^2}$

$$f(x) = \frac{X^2}{X^2 + X + 1} + 1 - \frac{X + 1}{X + \sqrt{2 - X^2} + 1} - \frac{1}{9} \text{ tương tự Mode 7 Table với Start } 0 = , \text{ End } 1,5 = , \text{ Step } 0.1 =$$

- Với  $x = X, y = 0,5, z = \sqrt{1,75 - X^2}$

$$g(x) = \frac{X^2}{X^2 + 0,5\sqrt{1,75 - X^2} + X + 1} + 1 - \frac{X + 1}{X + 1,5 + \sqrt{1,75 - X^2}} - \frac{1 + 0,5\sqrt{1,75 - X^2}}{9}$$

Ở bài này do đoạn nhỏ để nâng cao tính chính xác thì anh sẽ cho  $y : 0 \rightarrow 0,5 \rightarrow 1 \rightarrow \sqrt{2}$

Xong đợt 1 ta ghi kết quả ra giấy nháp và làm đợt 2 :

- Với  $x = X, y = 1, z = \sqrt{1 - X^2}$  :  $f(x) = \frac{X^2}{X^2 + \sqrt{1 - X^2} + X + 1} + 1 - \frac{X + 1}{X + 2 + \sqrt{1 - X^2}} - \frac{1 + \sqrt{1 - X^2}}{9}$

- Với  $x = X, y = \sqrt{2}, z = X$  :  $g(x) = \frac{X^2}{X^2 + X\sqrt{2} + X + 1} + 1 - \frac{X + 1}{X + \sqrt{2} + X + 1} - \frac{1 + X\sqrt{2}}{9}$



Bí kíp giải Bất Đẳng Thức bằng Casio fx 570 es,vn,vinacal plus

Chuyên đề đặc biệt

Đợt 1:			Đợt 2:			Nhận xét:																																										
<div><div>Math</div><table><tr><td>1</td><td>%</td><td>F(X)</td><td>G(X)</td></tr><tr><td>2</td><td>0</td><td>0.4611</td><td>0.4746</td></tr><tr><td>3</td><td>0.1</td><td>0.4597</td><td>0.4444</td></tr><tr><td>4</td><td>0.2</td><td>0.4596</td><td>0.4383</td></tr><tr><td>5</td><td></td><td>0.4746753265</td><td></td></tr></table></div>			1	%	F(X)	G(X)	2	0	0.4611	0.4746	3	0.1	0.4597	0.4444	4	0.2	0.4596	0.4383	5		0.4746753265		<div><div>Math</div><table><tr><td>1</td><td>%</td><td>F(X)</td><td>G(X)</td></tr><tr><td>2</td><td>0</td><td>0.4746</td><td>0.4746</td></tr><tr><td>3</td><td>0.1</td><td>0.4276</td><td>0.4603</td></tr><tr><td>4</td><td>0.2</td><td>0.4206</td><td>0.4573</td></tr><tr><td>5</td><td></td><td>4.9</td><td></td></tr></table></div>			1	%	F(X)	G(X)	2	0	0.4746	0.4746	3	0.1	0.4276	0.4603	4	0.2	0.4206	0.4573	5		4.9		Ở Đợt 1: Cột F(X) ta thấy các giá trị đẹp : $X = 1 \rightarrow P = 5/9$ Và nó là lớn nhất luôn , X tăng thì các giá trị lại giảm rồi lại tăng lên tới X=1 rồi lại giảm chứng tỏ đây là 1 cực đại Cột G(X) thì không thấy giá trị đẹp và cũng không có giá trị nào lớn hơn 5/9		
1	%	F(X)	G(X)																																													
2	0	0.4611	0.4746																																													
3	0.1	0.4597	0.4444																																													
4	0.2	0.4596	0.4383																																													
5		0.4746753265																																														
1	%	F(X)	G(X)																																													
2	0	0.4746	0.4746																																													
3	0.1	0.4276	0.4603																																													
4	0.2	0.4206	0.4573																																													
5		4.9																																														
<div><div>Math</div><table><tr><td>4</td><td>%</td><td>F(X)</td><td>G(X)</td></tr><tr><td>5</td><td>0.3</td><td>0.4689</td><td>0.4406</td></tr><tr><td>6</td><td>0.4</td><td>0.4835</td><td>0.4489</td></tr><tr><td>7</td><td>0.5</td><td>0.5101</td><td>0.4615</td></tr><tr><td>8</td><td></td><td>0.5003729983</td><td></td></tr></table></div>			4	%	F(X)	G(X)	5	0.3	0.4689	0.4406	6	0.4	0.4835	0.4489	7	0.5	0.5101	0.4615	8		0.5003729983		<div><div>Math</div><table><tr><td>4</td><td>%</td><td>F(X)</td><td>G(X)</td></tr><tr><td>5</td><td>0.3</td><td>0.4217</td><td>0.46</td></tr><tr><td>6</td><td>0.4</td><td>0.4295</td><td>0.4657</td></tr><tr><td>7</td><td>0.5</td><td>0.4727</td><td>0.4727</td></tr><tr><td>8</td><td></td><td>0.4425992299</td><td></td></tr></table></div>			4	%	F(X)	G(X)	5	0.3	0.4217	0.46	6	0.4	0.4295	0.4657	7	0.5	0.4727	0.4727	8		0.4425992299		Đợt 2: Cột F(X) ta thấy các giá trị đẹp : $X = 0 \rightarrow P = 4/9$ $X = 1 \rightarrow P = 5/9$ X tăng thì F(X) giảm xong lại tăng tới 5/9 là không tăng được nữa Cột G(X) ta không thấy giá trị nào đẹp và cũng không có giá trị nào lớn hơn 5/9		
4	%	F(X)	G(X)																																													
5	0.3	0.4689	0.4406																																													
6	0.4	0.4835	0.4489																																													
7	0.5	0.5101	0.4615																																													
8		0.5003729983																																														
4	%	F(X)	G(X)																																													
5	0.3	0.4217	0.46																																													
6	0.4	0.4295	0.4657																																													
7	0.5	0.4727	0.4727																																													
8		0.4425992299																																														
<div><div>Math</div><table><tr><td>7</td><td>%</td><td>F(X)</td><td>G(X)</td></tr><tr><td>8</td><td>0.6</td><td>0.5171</td><td>0.4766</td></tr><tr><td>9</td><td>0.7</td><td>0.5321</td><td>0.4929</td></tr><tr><td>10</td><td>0.8</td><td>0.5473</td><td>0.5093</td></tr><tr><td>11</td><td></td><td>0.544344972</td><td></td></tr></table></div>			7	%	F(X)	G(X)	8	0.6	0.5171	0.4766	9	0.7	0.5321	0.4929	10	0.8	0.5473	0.5093	11		0.544344972		<div><div>Math</div><table><tr><td>7</td><td>%</td><td>F(X)</td><td>G(X)</td></tr><tr><td>8</td><td>0.6</td><td>0.4598</td><td>0.48</td></tr><tr><td>9</td><td>0.7</td><td>0.4803</td><td>0.4872</td></tr><tr><td>10</td><td>0.8</td><td>0.4939</td><td>0.4939</td></tr><tr><td>11</td><td></td><td>0.5033367733</td><td></td></tr></table></div>			7	%	F(X)	G(X)	8	0.6	0.4598	0.48	9	0.7	0.4803	0.4872	10	0.8	0.4939	0.4939	11		0.5033367733				
7	%	F(X)	G(X)																																													
8	0.6	0.5171	0.4766																																													
9	0.7	0.5321	0.4929																																													
10	0.8	0.5473	0.5093																																													
11		0.544344972																																														
7	%	F(X)	G(X)																																													
8	0.6	0.4598	0.48																																													
9	0.7	0.4803	0.4872																																													
10	0.8	0.4939	0.4939																																													
11		0.5033367733																																														
<div><div>Math</div><table><tr><td>10</td><td>%</td><td>F(X)</td><td>G(X)</td></tr><tr><td>11</td><td>0.9</td><td>0.5525</td><td>0.5246</td></tr><tr><td>12</td><td>1</td><td>0.5555</td><td>0.5378</td></tr><tr><td>13</td><td>1.1</td><td>0.5518</td><td>0.5473</td></tr><tr><td>14</td><td></td><td>5.9</td><td></td></tr></table></div>			10	%	F(X)	G(X)	11	0.9	0.5525	0.5246	12	1	0.5555	0.5378	13	1.1	0.5518	0.5473	14		5.9		<div><div>Math</div><table><tr><td>10</td><td>%</td><td>F(X)</td><td>G(X)</td></tr><tr><td>11</td><td>0.9</td><td>0.5283</td><td>0.4999</td></tr><tr><td>12</td><td>1</td><td>0.5555</td><td>0.5052</td></tr><tr><td>13</td><td>1.1</td><td>0.5383</td><td>0.5096</td></tr><tr><td>14</td><td></td><td>ERROR</td><td></td></tr></table></div>			10	%	F(X)	G(X)	11	0.9	0.5283	0.4999	12	1	0.5555	0.5052	13	1.1	0.5383	0.5096	14		ERROR				
10	%	F(X)	G(X)																																													
11	0.9	0.5525	0.5246																																													
12	1	0.5555	0.5378																																													
13	1.1	0.5518	0.5473																																													
14		5.9																																														
10	%	F(X)	G(X)																																													
11	0.9	0.5283	0.4999																																													
12	1	0.5555	0.5052																																													
13	1.1	0.5383	0.5096																																													
14		ERROR																																														
<div><div>Math</div><table><tr><td>13</td><td>%</td><td>F(X)</td><td>G(X)</td></tr><tr><td>14</td><td>1.2</td><td>0.5383</td><td>0.5499</td></tr><tr><td>15</td><td>1.3</td><td>0.5073</td><td>0.5308</td></tr><tr><td>16</td><td>1.4</td><td>0.4153532502</td><td>ERROR</td></tr></table></div>			13	%	F(X)	G(X)	14	1.2	0.5383	0.5499	15	1.3	0.5073	0.5308	16	1.4	0.4153532502	ERROR	<div><div>Math</div><table><tr><td>13</td><td>%</td><td>F(X)</td><td>G(X)</td></tr><tr><td>14</td><td>1.2</td><td>ERROR</td><td>0.5131</td></tr><tr><td>15</td><td>1.3</td><td>ERROR</td><td>0.5158</td></tr><tr><td>16</td><td>1.4</td><td>ERROR</td><td>0.5177</td></tr><tr><td>17</td><td></td><td>ERROR</td><td></td></tr></table></div>			13	%	F(X)	G(X)	14	1.2	ERROR	0.5131	15	1.3	ERROR	0.5158	16	1.4	ERROR	0.5177	17		ERROR		Vậy tóm lại Max là 5/9 với $x = 1, y = 0, z = 1$ Hoặc $x = 1, y = 1, z = 0$ Vậy khả năng cao đôn biến $t = x + y + z = 2$						
13	%	F(X)	G(X)																																													
14	1.2	0.5383	0.5499																																													
15	1.3	0.5073	0.5308																																													
16	1.4	0.4153532502	ERROR																																													
13	%	F(X)	G(X)																																													
14	1.2	ERROR	0.5131																																													
15	1.3	ERROR	0.5158																																													
16	1.4	ERROR	0.5177																																													
17		ERROR																																														

Đặt :  $t = x + y + z$

$$0 \leq t^2 = (x + y + z)^2 \leq 3(x^2 + y^2 + z^2) = 6 \rightarrow t \in [0, \sqrt{6}]$$

Bây giờ ta xử lí  $P = \frac{x^2}{x^2 + yz + x + 1} + \frac{y + z}{x + y + z + 1} - \frac{1 + yz}{9} \leq f(t)$

Làm sao để đưa được về ẩn t, xử từng em 1 nhé:

$A = \frac{x^2}{x^2 + yz + x + 1}$  thay  $x = 1, y = 0, z = 1$  vào được  $A = \frac{1}{3} = \frac{1}{x + y + z + 1} = \frac{x}{x + y + z + 1}$

$B = \frac{y + z}{x + y + z + 1}$  nếu đánh giá được cái A với  $\frac{x}{x + y + z + 1}$  thì A+B sẽ rất đẹp, ta thử xem:

Cần chứng minh:  $\frac{x^2}{x^2 + yz + x + 1} \leq \frac{x}{x + y + z + 1}$

$$\Leftrightarrow x(x + y + z + 1) \leq x^2 + yz + x + 1$$

$$\Leftrightarrow xy + xz \leq yz + 1$$

Ta cố ý nhân 2 để đưa nó về bình phương.

$$\Leftrightarrow 2xy + 2xz \leq 2yz + 2$$

$$\Leftrightarrow 2 - 2xy - 2xz + 2yz \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz + 2yz \geq 0 @@ \text{ đúng quá, lại còn rất tự nhiên nữa, Đáng.....}$$

$$\Leftrightarrow (x - y - z)^2 \geq 0$$



**Bí kíp giải Bất Đẳng Thức bằng Casio fx 570 es,vn,vinacal plus**

**Chuyên đề đặc biệt**

$$C = \frac{1+yz}{9} \geq ???(x+y+z) \text{ Thay } x=1, y=0, z=1 \text{ được } C = \frac{1}{9} = \frac{x+y+z}{18} = \frac{(x+y+z)^2}{36}$$

Đừng em nào đại dốt  $y^2 + z^2 \geq 2yz$  @@ nhé chú ý cái dấu “=” kia

**Ta biết thừa dấu = xảy ra khi  $x = y + z$  tức là ta cần sử dụng  $x^2 + (y+z)^2 \geq 2x(y+z)$**

**Tư duy 1 chút sẽ thấy như sau:**

$$x^2 + (y+z)^2 \geq 2x(y+z) \rightarrow 2 + 2yz \geq 2xy + 2xz$$

$$\rightarrow 2 + 4yz \geq 2xy + 2xz + 2yz$$

$$\rightarrow 2 + 4yz + (x^2 + y^2 + z^2) \geq 2xy + 2xz + 2yz + (x^2 + y^2 + z^2)$$

$$\rightarrow 4 + 4yz \geq (x+y+z)^2 \rightarrow 1 + yz \geq \frac{(x+y+z)^2}{4}$$

**Phần trên là phân tích ngược, giờ các em chỉ cần chứng minh ngược lại là được:**

$$(x+y+z)^2 = 2xy + 2xy + 2yz + (x^2 + y^2 + z^2) = 2x(y+z) + 2 + 2yz \leq x^2 + (y+z)^2 + 2 + 2yz = 4 + 4yz$$

$$\rightarrow 1 + yz \geq \frac{(x+y+z)^2}{4}$$

$$\text{Ta có: } P \leq \frac{x+y+z}{x+y+z+1} - \frac{(x+y+z)^2}{36} = \frac{t}{t+1} - \frac{t^2}{36} = f(t), t \in [0, \sqrt{6}]$$

**Đến đây có thể thở phào nhẹ nhõm ầm gọn con 10 rồi @@**

$$f'(t) = \frac{1}{(t+1)^2} - \frac{t}{18} = -\frac{(t-2)(t^2+4t+9)}{18(t+1)^2} \quad f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 2$$

$$f(0) = 0; f(2) = \frac{5}{9}, f(\sqrt{6}) = \frac{31}{30} - \frac{\sqrt{6}}{5} \quad \text{Lập BBT rồi suy ra } P \leq f(t) \leq \frac{5}{9} \rightarrow P_{\max} = \frac{5}{9} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1, y=1, z=0 \\ x=1, y=0, z=1 \end{cases}$$

**Đề của khối A thường là các câu khó, ta sẽ cày tiếp 1 câu khối A**

**Bài 3 (ĐH-B2013)** Cho  $a, b, c$  là các số thực dương. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \frac{4}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 4}} - \frac{9}{(a+b)\sqrt{(a+2c)(b+2c)}}$$

**Phân tích:**

Ở những bài chỉ cho điều kiện  $a, b, c > 0$  mà không cho mối liên hệ giữa  $a, b, c$  thì thường là  $a = b = c$  nhưng vấn đề là nó bằng bao nhiêu?

$$\text{Khi đó ta có } P = \frac{4}{\sqrt{3a^2 + 4}} - \frac{9}{2a\sqrt{9a^2}} = \frac{4}{\sqrt{3a^2 + 4}} - \frac{3}{2a}$$

Ta sẽ check nhanh bằng máy xem  $a=b=c=2$  đã là lớn nhất chưa

Với chúng khác nhau thì sao, ở đây Start các em cho 0,5 = vì nhập 0 là lỗi, End để hẳn 10 =, Step 0,5 =

Với trường hợp  $a \neq b \neq c$  thì các em cứ để tùy ý

$a = b = c$

$a = X \neq b = 1 \neq c = 2$  : cứ thay đổi tùy ý

Nhận xét



# Bí kíp giải Bất Đẳng Thức bằng Casio fx 570 es,vn,vinacal plus

## Chuyên đề đặc biệt

$f(x) = \frac{4}{\sqrt{3a^2 + 4}} - \frac{9}{6a^2}$ <div> <table border="1"> <thead> <tr> <th>X</th> <th>F(X)</th> <th>G(X)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>0.5</td><td>-4.164</td><td>0.0502</td></tr> <tr><td>1</td><td>0.0118</td><td>0.3649</td></tr> <tr><td>1.5</td><td>0.0118</td><td>0.506</td></tr> <tr><td>2</td><td>0.0118</td><td>0.553321896</td></tr> <tr><td>2.5</td><td>0.0118</td><td>0.5616</td></tr> <tr><td>3</td><td>0.0118</td><td>0.5732</td></tr> <tr><td>3.5</td><td>0.0118</td><td>0.5824</td></tr> <tr><td>4</td><td>0.0118</td><td>0.5885</td></tr> <tr><td>4.5</td><td>0.0118</td><td>0.5911</td></tr> <tr><td>5</td><td>0.0118</td><td>0.5915</td></tr> <tr><td>5.5</td><td>0.0118</td><td>0.5915</td></tr> <tr><td>6</td><td>0.0118</td><td>0.5915</td></tr> </tbody> </table> </div>	X	F(X)	G(X)	0.5	-4.164	0.0502	1	0.0118	0.3649	1.5	0.0118	0.506	2	0.0118	0.553321896	2.5	0.0118	0.5616	3	0.0118	0.5732	3.5	0.0118	0.5824	4	0.0118	0.5885	4.5	0.0118	0.5911	5	0.0118	0.5915	5.5	0.0118	0.5915	6	0.0118	0.5915	$g(x) = \frac{4}{\sqrt{a^2 + 9}} - \frac{9}{(a+1)\sqrt{(a+4).5}}$ <div> <table border="1"> <thead> <tr> <th>X</th> <th>F(X)</th> <th>G(X)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>6.5</td><td>0.3143</td><td>0.3931</td></tr> <tr><td>7</td><td>0.2949</td><td>0.3735</td></tr> <tr><td>7.5</td><td>0.2776</td><td>0.3555</td></tr> <tr><td>8</td><td>0.2622</td><td>0.3339</td></tr> <tr><td>8.5</td><td>0.2484</td><td>0.3239</td></tr> <tr><td>9</td><td>0.2359</td><td>0.31</td></tr> <tr><td>9.5</td><td>0.2246</td><td>0.2971</td></tr> <tr><td>10</td><td>0.2144</td><td>0.2853</td></tr> </tbody> </table> </div>	X	F(X)	G(X)	6.5	0.3143	0.3931	7	0.2949	0.3735	7.5	0.2776	0.3555	8	0.2622	0.3339	8.5	0.2484	0.3239	9	0.2359	0.31	9.5	0.2246	0.2971	10	0.2144	0.2853	<p>Ta thấy tại <math>a=b=c=2</math> kết quả vẫn là đẹp nhất và lớn nhất hội. Nên dự đoán của chúng ta là đúng.</p> <p>Bây giờ chỉ cần ghép hợp lí để dồn biến về <math>t=a+b+c=6</math> là xong</p>
X	F(X)	G(X)																																																																		
0.5	-4.164	0.0502																																																																		
1	0.0118	0.3649																																																																		
1.5	0.0118	0.506																																																																		
2	0.0118	0.553321896																																																																		
2.5	0.0118	0.5616																																																																		
3	0.0118	0.5732																																																																		
3.5	0.0118	0.5824																																																																		
4	0.0118	0.5885																																																																		
4.5	0.0118	0.5911																																																																		
5	0.0118	0.5915																																																																		
5.5	0.0118	0.5915																																																																		
6	0.0118	0.5915																																																																		
X	F(X)	G(X)																																																																		
6.5	0.3143	0.3931																																																																		
7	0.2949	0.3735																																																																		
7.5	0.2776	0.3555																																																																		
8	0.2622	0.3339																																																																		
8.5	0.2484	0.3239																																																																		
9	0.2359	0.31																																																																		
9.5	0.2246	0.2971																																																																		
10	0.2144	0.2853																																																																		

$$P = \frac{4}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 4}} - \frac{9}{(a+b)\sqrt{(a+2c)(b+2c)}} \leq f(t)$$

$$A = \frac{4}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 4}} \leq \frac{?}{a+b+c+?}, \text{ thay } a=b=c=2 \text{ được } A=1 \rightarrow A = \frac{4}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 4}} \geq \frac{8}{a+b+c+2}$$

do  $a=b=c=2$  rồi nên ta nhớ lại đánh giá củ chuỗi của chúng ta:

$$a^2 + b^2 + c^2 + 4 = a^2 + b^2 + c^2 + 2^2 \geq \frac{(a+b)^2}{2} + \frac{(c+2)^2}{2} \geq \frac{1}{2} \left( \frac{a+b+c+2}{2} \right)^2$$

$$\rightarrow A = \frac{4}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 4}} \leq \frac{8}{a+b+c+2}$$

$$B = \frac{9}{(a+b)\sqrt{(a+2c)(b+2c)}} \geq \frac{?}{(a+b+c)^2} \text{ Thay thay } a=b=c=2 \text{ được } B = \frac{3}{8}$$

Với  $a=b=c$  hiển nhiên ta có  $a+2c=b+2c$

$$(a+b)\sqrt{(a+2c)(b+2c)} \leq (a+b) \frac{1}{2} [(a+2c) + (b+2c)] = \frac{1}{6} (3a+3b)(a+b+4c) \leq \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4} [4(a+b+c)]^2 = \frac{2}{3} (a+b+c)^2$$

Chỗ này rất quan trọng nhé:  $a+b+4c = a+b+2(a+b) = 3(a+b)$  rồi áp dụng  $xy \leq \frac{(x+y)^2}{4}$

Do đó mà có động thái nhân thêm 3 để nó bảo toàn cái dấu “=” của BĐT

$$B = \frac{9}{(a+b)\sqrt{(a+2c)(b+2c)}} \geq 9 \cdot \frac{3}{2(a+b+c)^2}$$



# Bí kíp giải Bất Đẳng Thức bằng Casio fx 570 es,vn,vinacal plus

## Chuyên đề đặc biệt

$$\Rightarrow P = \frac{4}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 4}} - \frac{9}{(a+b)\sqrt{(a+2c)(b+2c)}} \leq \frac{8}{t+2} - \frac{27}{2t^2} = f(t), t > 0$$

$$f'(t) = -\frac{8}{(t+2)^2} + \frac{27}{t^3}$$

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow 27(t+2)^2 - 8t^3 = 0 \Leftrightarrow t = 6$$

t	0	6	$+\infty$
$f'(t)$		+	-
$f(t)$		$\frac{5}{8}$	

$$P \leq f(t) \leq \frac{5}{8}; \max P = \frac{5}{8} \text{ xảy ra khi } a = b = c = 2.$$

Loại 2 : Đồn từ 3 biến thành 2 biến , rồi 2 biến thành 1 biến ; BDT 2 biến

Đây là dạng đơn giản hơn, dạng này thường có dấu hiệu là có điều kiện của biến nhưng khuyết mỗi liên hệ giữa 3 biến hoặc mỗi liên hệ mờ nhạt, biểu thức cần tính thì có 2 biến đối xứng và thường chỉ cần chia đi 1 biến không đối xứng ta sẽ chỉ còn 2 biến và đồn về 1 biến nữa là xong.

1 nhận xét thêm nữa là những dạng này thường là ở dạng phân số và có tử và mẫu đồng bậc

**Bài 1(DH - A2013)** Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn điều kiện  $(a+c)(b+c) = 4c^2$ . Tìm giá trị nhỏ nhất

$$\text{của biểu thức } P = \frac{32a^3}{(b+3c)^3} + \frac{32b^3}{(a+3c)^3} - \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{c}$$

**Phân tích:**

**Điều kiện :**  $a, b, c > 0$

**Mối liên hệ:**  $(a+c)(b+c) = 4c^2$  với mối liên hệ này ta khó lòng rút ra được ngay  $c = ?? f(a, b)$

Nó cũng gợi ý nhỏ cho ta là chia đi vì 2 về đồng bậc

$$P = \frac{32a^3}{(b+3c)^3} + \frac{32b^3}{(a+3c)^3} - \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{c} \text{ gợi ý cho ta như sau:}$$

$$\frac{32a^3}{(b+3c)^3} \rightarrow \text{tử và mẫu đồng bậc nên thường chia đi, tương tự } \frac{32b^3}{(a+3c)^3}, \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{c}$$

Và chú ý là a, b có thể thay đổi cho nhau nhưng lại không thể thay cho c, nên thường ta chia cho c, c^2, c^3 tùy vào bậc của a, b

Vậy việc đầu tiên là chia đi và đồn 3 biến thành 2 biến:

$$\left\{ \begin{array}{l} (a+c)(b+c) = 4c^2 \\ P = \frac{32a^3}{(b+3c)^3} + \frac{32b^3}{(a+3c)^3} - \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{c} \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{a}{c} + 1\right)\left(\frac{b}{c} + 1\right) = 4 \\ \frac{32\left(\frac{a}{c}\right)^3}{\left[\left(\frac{b}{c} + 1\right) + 3\right]^3} + \frac{32\left(\frac{b}{c}\right)^3}{\left[\left(\frac{a}{c} + 1\right) + 3\right]^3} - \sqrt{\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2} \end{array} \right. \text{Đặt : } x = \frac{a}{c}, y = \frac{b}{c}; x, y > 0$$



## Bí kíp giải Bất Đẳng Thức bằng Casio fx 570 es,vn,vinacal plus

Chuyên đề đặc biệt

$$\rightarrow \begin{cases} (x+1)(y+1) = 4 \rightarrow x+y+xy = 3 \\ P = \frac{32x^3}{(y+3)^3} + \frac{32y^3}{(x+3)^3} - \sqrt{x^2+y^2} \end{cases}$$

tới đây ta thấy bài toán đơn giản hơn nhiều, bây giờ tiếp tục dồn về 1 biến duy nhất nhưng trước hết ta phải khảo sát ngay xem nó đạt cực đại tại đâu:

$$x+y+xy=3 \rightarrow y = \frac{3-x}{1+x}; x, y \in (0;1]$$

Ta sẽ cho x chạy từ 0 tới 1 nhé bấm 1 bảng F(x) thôi, bỏ bảng G(X) bằng cách bấm “=”

$$F(x) = \frac{32x^3}{\left(\frac{3-x}{1+x}+3\right)^3} + \frac{32\left(\frac{3-x}{1+x}\right)^3}{(x+3)^3} - \sqrt{x^2 + \left(\frac{3-x}{1+x}\right)^2}$$

với Start 0 = , End 1 = , Step 0,1 =

Khi nhập đúng là max nhỏ vì thiếu đúng 1 kí tự bình phương nữa thôi, ta thử rút gọn tối đa xem, không ta sẽ phải dùng 1 cách khác

Vâng, thực sự là trừ không phù hợp ta còn thiếu đúng 1 kí tự bình phương nữa là xong, Đúng là trời đã sinh Table sao lại còn sinh ra giới hạn bộ nhớ RAM

**Rất may cho các thanh niên dùng Fx 570 vn plus ta còn bảng G(X) bơ vơ**

Ta nhập :

$$F(x) = \frac{32x^3}{\left(\frac{3-x}{1+x}+3\right)^3} + \frac{32\left(\frac{3-x}{1+x}\right)^3}{(x+3)^3}; G(X) = -\sqrt{x^2 + \left(\frac{3-x}{1+x}\right)^2}$$

với Start 0 = , End 1 = , Step 0,1 =

$$P = F(X) + G(X)$$



1	%	F(X)	G(X)
2	0.1	19.682	-2.638
3	0.2	12.40764815	-2.341
4	0.3	7.9841	-2.098
5	0.4	5.2328	-1.899
6	0.5	3.494708995	-1.74
7	0.6	2.3906	-1.615
8	0.7	1.6975	-1.523
9	0.8	1.282424115	-1.46
10	0.9	1.0655	-1.425
11	1		-1.414
12			

Chúng ta ghi các kết quả sau ra giấy và tiến hành công tay

Loại cái dòng x=0 đi nhé vì điều kiện ban đầu.

Để ý thì thấy mỗi X=1 thì F(X) đẹp, ngo qua thẳng G(X) thấy quen quen ^\_^ hình như là  $\sqrt{2}$  cơ mà mình cũng chả quan tâm, chủ yếu là quan tâm xem dấu = ở đâu.

X	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
P ≈	17.5	10.1	5.8	3.3	1.7	0.8	0.1	-0.2	-0.3	-0.4

Thực ra thì 1 lúc ta thấy nó giảm là có thể đoán ngay được hoặc là từ X=0,1 đến 0,7 là nó dương đoạn sau lại âm là ta cũng có thể đoán nhanh chỉ tính đoạn sau thôi cũng được, ở đây anh thống kê cho dễ hiểu

Ta thấy ngay  $x = 1 \rightarrow P_{\min} = 1 - \sqrt{2}$

Vậy rõ ràng  $x = y = 1$  ta sẽ dồn biến về  $t = x + y = 2$  và đánh giá thoải mái miễn x=y

Đặt  $t = x + y = 2$

Xử lý điều kiện :

$$3 = x + y + xy \leq x + y + \frac{(x + y)^2}{4} \Leftrightarrow t^2 + 4t - 12 \geq 0 \Leftrightarrow t \geq 2 \quad \text{Mặt khác } t = 3 - xy < 3 \rightarrow t \in [2; 3)$$

Giờ ép về cái hàm đồng biến là xong

$$P = \frac{32x^3}{(y+3)^3} + \frac{32y^3}{(x+3)^3} - \sqrt{x^2 + y^2} \geq f(t), t \in [2; 3)$$

$$A = \frac{32x^3}{(y+3)^3} + \frac{32y^3}{(x+3)^3} \geq ? f(x+y) \text{ thay } x = y = 1 \text{ vào ta được : } A = 1 = x + y - 1 = (x + y - 1)^2 = (x + y - 1)^3$$

Với  $x = y$  thì ta thấy  $\frac{32x^3}{(y+3)^3} = \frac{32y^3}{(x+3)^3} \Leftrightarrow \frac{x}{y+3} = \frac{y}{x+3}$  nên ta cần áp dụng BDT gì đó để cho 2 thằng đó bằng

nhau mục đích là  $\frac{x}{y+3} + \frac{y}{x+3}$  đưa được về dạng  $(x+y)$

Ta thấy A có dạng :  $A = 32(u^3 + v^3)$

$$\text{Mà } u^3 + v^3 = (u + v)^3 - 3uv(u + v) \geq (u + v)^3 - 3 \cdot \frac{(u + v)^2}{4} \cdot (u + v) = \frac{(u + v)^3}{4}$$

$$\rightarrow A = \frac{32x^3}{(y+3)^3} + \frac{32y^3}{(x+3)^3} \geq 8 \left( \frac{x}{y+3} + \frac{y}{x+3} \right)^3 = 8 \left( \frac{x^2 + 3x + y^2 + 3y}{xy + 3(x + y) + 9} \right) = 8 \left( \frac{(x + y)^2 - 2xy + 3(x + y)}{xy + 3(x + y) + 9} \right)$$

Các em thế  $xy = 3 - (x + y)$  vào, trâu bò phết đó @@

$$8 \left( \frac{(x + y)^2 - 2xy + 3(x + y)}{xy + 3(x + y) + 9} \right)^3 = 8 \left( \frac{t^2 - 2(3 - t) + 3t}{3 - t + 3t + 9} \right)^3 = 8 \left( \frac{t^2 + 5t - 6}{2(t + 6)} \right)^3 = (t - 1)^3$$

Em khó nhất xong rồi, còn em này nữa

$\sqrt{x^2 + y^2} \leq ??? f(x + y) \frac{1}{2}$  chả có cái đánh giá Cô-si nào làm được cái tổng mà lại lớn hơn tổng bình phương này,

keke



## Bí kíp giải Bất Đẳng Thức bằng Casio fx 570 es,vn,vinacal plus

Chuyên đề đặc biệt

Ta có:  $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = t^2 - 2(3 - t) = t^2 + 2t - 6 \rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{t^2 + 2t - 6}$

$$P = \frac{32x^3}{(y+3)^3} + \frac{32y^3}{(x+3)^3} - \sqrt{x^2 + y^2} \geq (t-1)^3 - \sqrt{t^2 + 2t - 6} = f(t), t \in [2, 3]$$

Bài này trâu thật, đến cái hàm cũng cho xấu kinh khủng

$$f'(t) = 3(t-1)^2 - \frac{t+1}{\sqrt{(t+1)^2 - 7}} = 3(t-1)^2 - \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{7}{(t+1)^2}}} \geq f'(2) = 3 - \frac{3}{\sqrt{2}} > 0 \text{ hàm đồng biến nên nhỏ nhất tại } t=2$$

@@ hơi bị nản rồi ý, có khi lấy 9,75 thôi :D

$$\text{Vậy: } P \geq f(t) \geq f(2) = 1 - \sqrt{2} \text{ Do đó } P_{\min} = 1 - \sqrt{2} \leftrightarrow x = y = 1 \rightarrow a = b = c$$

**Bài 2(B-2014):** Cho các số thực  $a, b, c$  không âm và thỏa mãn điều kiện  $(a+b)c > 0$ .

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức.

$$P = \sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{a+c}} + \frac{c}{2(a+b)}$$

### Phân tích:

Câu này tương tự nhè các em, cũng chia đi rồi đặt và thậm chí dễ hơn câu trên nhiều, vẫn ghép 2 thẳng đầu với nhau để dồn biến

Do  $a, b$  đối xứng và  $c$  lạc loài nên chia đi  $c$ , thực ra thì điều kiện  $\begin{cases} a, b, c \geq 0 \\ (a+b)c > 0 \end{cases} \rightarrow c > 0, a+b > 0$  đã gợi ý chia  $c$  rồi

$$P = \sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{a+c}} + \frac{c}{2(a+b)} = \sqrt{\frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}+1}} + \sqrt{\frac{\frac{b}{c}}{\frac{a}{c}+1}} + \frac{1}{2\left(\frac{b}{c} + \frac{a}{c}\right)}$$

$$\text{Đặt: } x = \frac{a}{c}, y = \frac{b}{c}; x, y \geq 0 \Rightarrow P = \sqrt{\frac{x}{y+1}} + \sqrt{\frac{y}{x+1}} + \frac{1}{2(x+y)} \text{ bây giờ làm sao để dồn về 1 biến cuối cùng}$$

$$\text{Ta chỉ cần xử lí } A = \sqrt{\frac{x}{y+1}} + \sqrt{\frac{y}{x+1}} \geq ??? f(x+y) \text{ là xong}$$

Bây giờ ta cần xem xét dấu “=” xảy ra tại đâu đã

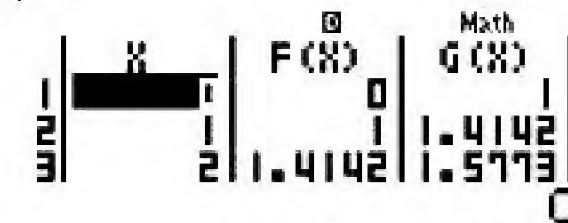







Do khoảng của  $Y$  khá là rộng chứ không thuộc 1 đoạn hẹp nên vấn đề chọn  $Y$  cũng khá nhức nhối

Ta sẽ thử từ  $y: 0 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$  xem  $A$  biến thiên như thế nào?

$$\text{Đợt 1: } f(x) = \sqrt{\frac{x}{0+1}} + \sqrt{\frac{0}{x+1}} \quad g(x) = \sqrt{\frac{x}{1+1}} + \sqrt{\frac{1}{x+1}} \text{ với Start } 0 = \text{End } 10 = \text{step } 1 =$$

$$\text{Đợt 2: } f(x) = \sqrt{\frac{x}{2+1}} + \sqrt{\frac{2}{x+1}} \quad g(x) = \sqrt{\frac{x}{3+1}} + \sqrt{\frac{3}{x+1}} \text{ với Start } 0 = \text{End } 10 = \text{step } 1 =$$



Đợt 1	Đợt 2	*Đợt 1:
		Ta thấy ngay X tăng thì giá trị A tăng, Y tăng thì giá trị P giảm kể từ khi X=1 Các em chú ý này Y tăng thì nhìn từ F(x) sang G(X) còn X tăng thì nhìn thẳng hàng dọc từng cột.
		Chúng ta bỏ ô x=y=0 nhé vì điều kiện. Nhìn toàn bộ bảng ta chỉ thấy duy nhất A=1 là nhỏ nhất khi đó X=1,Y=0 hoặc X=0, Y=1 Tức là X+Y=1
		<i>Ở ví dụ này tính may mắn khá cao, là nếu họ cho điểm rơi x,y không nguyên hay đẹp thì khó, nói chung là các em cứ chia y đủ nhỏ làm sao mà bấm ra được giá trị đẹp</i>
		

Bây giờ thì ta chỉ biết giữ vững niềm tin dồn về  $t = x + y = 1$  và dấu "=" khi  $x = y + 1$  hoặc  $y = x + 1$

Do tính chất đối xứng nên cặp  $x=1,y=0$  mới sinh ra thêm hoán vị  $x=0,y=1$  như ở các ví dụ trước.

Ta xem xét từng biểu thức: nếu  $x = y + 1$

$$x + (y + 1) \geq 2\sqrt{x(y + 1)} \Leftrightarrow \frac{x}{x + y + 1} \leq \frac{x}{2\sqrt{x(y + 1)}} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{x}{y + 1}} \geq \frac{2x}{x + y + 1} \text{ dấu "=" khi } x=y+1 \text{ hoặc } x=0 \text{ ( cái này do}$$

minh lấy x chia cho 2 về nên nó tạo ra thêm)

$$\text{Tương tự } \sqrt{\frac{y}{x + 1}} \geq \frac{2y}{x + y + 1} \text{ dấu "=" khi } y=x+1 \text{ hoặc } y=0$$

$$\text{Vậy : } A = \sqrt{\frac{x}{y + 1}} + \sqrt{\frac{y}{x + 1}} \geq \frac{2(x + y)}{x + y + 1}$$

$$\Rightarrow P = \sqrt{\frac{x}{y + 1}} + \sqrt{\frac{y}{x + 1}} + \frac{1}{2(x + y)} \geq \frac{2t}{t + 1} + \frac{1}{2t} = f(t), t > 0$$

$$f'(t) = \frac{2}{(t + 1)^2} - \frac{1}{2t^2}, f'(t) = 0 \Leftrightarrow 4t^2 = (t + 1)^2 \Leftrightarrow 2t = t + 1 \Leftrightarrow t = 1 \text{ ( do } t > 0 \text{ mới đưa ko cần giá trị tuyệt đối nhé)}$$

$$\text{Giờ các em lập BBT suy ra } P \geq f(t) \geq f(1) = \frac{3}{2} \rightarrow \begin{cases} x = y + 1, y = 0 \rightarrow b = 0, a = c \\ y = x + 1, x = 0 \rightarrow a = 0, b = c \end{cases}$$



\* Các BĐT 2 biến trong đề thi

**Bài 1 (D-2014):** Cho hai số thực  $x, y$  thỏa mãn các điều kiện  $1 \leq x \leq 2; 1 \leq y \leq 2$ .

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$P = \frac{x+2y}{x^2+3y+5} + \frac{y+2x}{y^2+3x+5} + \frac{1}{4(x+y-1)}$$

**Phân tích:**

Ta có :  $x, y \in [1; 2]$  và trong P chúng đối xứng với nhau

Bài này cái điều kiện giống đề 2016 nên ta cũng xử lí nó tương tự như vậy :

$$\begin{cases} 1 \leq x \leq 2 \\ 1 \leq y \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x-2) \leq 0 \\ (y-1)(y-2) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \leq 3x-2 \\ y^2 \leq 3y-2 \end{cases}$$

Đây gọi là đánh giá ở Biên, nếu dấu “=” xảy ra tại Biên thì ta

sử dụng luôn còn không thì toạch :3 keke, phải nghĩ sang hướng khác

Lại bấm máy thần trường, ời mệt.....

Ta chỉ cần xét  $y = 1, y = 2$  thôi

**Tới đây mới bật bí:** Thường người ta cho dấu “=” của BDT xảy ra tại biên như vậy các biến lệch nhau mới khó nên anh thường cho y kẹp 2 đầu mọt khi bấm 1 lần là do thế, khi nào không thấy giá trị đẹp hay cần thận thì mới chia nhỏ thêm y ra mà bấm

$$f(x) = \frac{x+2}{x^2+8} + \frac{1+2x}{6+3x} + \frac{1}{4x}$$

$$g(x) = \frac{x+4}{x^2+11} + \frac{2+2x}{3x+9} + \frac{1}{4(x+1)}$$

với Start 1 = End 2 = và Step 0.1 =

1 2 3	Math F(X) G(X) 0.875 0.8782 0.8808 11.12
4 5 6	Math F(X) G(X) 0.8829 0.8844 0.8854 0.8890824623
7 8 9	Math F(X) G(X) 0.8859 0.8859 0.8854 0.8804759526
10 11 12	Math F(X) G(X) 0.8845 0.8833 7.8

Nhìn vào cột F(X) trước ta thấy nó giảm dần có các giá trị đẹp là

$$X=1 \rightarrow P=11/12 \quad X=2 \rightarrow P=7/8$$

Nhìn cột G(X) ta thấy nó tăng giảm lẫn lộn @@

Nhưng có giá trị đẹp là :

$$X=1 \rightarrow P=7/8 \quad X=2, P=53/60$$

Giá trị 7/8 cứ được lặp lại do tính chất đối xứng của biến và nó cũng nhỏ nhất hội

$$\text{Vậy giá cát dự là } P_{\min} = \frac{7}{8} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2, y=1 \\ x=1, y=2 \end{cases}$$

Vậy ta cần áp dụng BDT biên vào P



# Bí kíp giải Bất Đẳng Thức bằng Casio fx 570 es,vn,vinacal plus

## Chuyên đề đặc biệt

$$P \geq \frac{x+2y}{3(x+y)+3} + \frac{y+2x}{3(x+y)+3} + \frac{1}{4(x+y-1)} = \frac{x+y}{x+y+1} + \frac{1}{4(x+y-1)} = \frac{t}{t+1} + \frac{1}{4(t-1)}$$

Đặt  $t = x + y$ , ĐK:  $2 \leq t \leq 4$

$$f(t) = \frac{t}{t+1} + \frac{1}{4(t-1)}, t \in [2; 4]$$

$$f'(t) = \frac{1}{(t+1)^2} - \frac{1}{4(t-1)^2}$$

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow 2(t-1) = t+1 \Leftrightarrow t = 3$$

Ta có  $f(3) = \frac{7}{8}$ . Khi  $t = 3 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \vee x = 2 \\ y = 1 \vee y = 2 \\ x + y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$ . Vậy  $P_{\min} = \frac{7}{8}$  tại  $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$  hay  $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$

**Bài 2 (D-2013):** Cho  $x, y$  là các số thực dương thỏa mãn điều kiện  $xy \leq y - 1$ . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{x+y}{\sqrt{x^2 - xy + 3y^2}} - \frac{x-2y}{6(x+y)}$$

**Phân tích:**

Đây là 1 dạng toán BDT cơ bản, chia đi rồi đặt ẩn phụ và xét hàm đơn thuần nên không cần thiết phải sử dụng máy tính.

Từ giả thiết ta có:  $xy \leq y - 1 \Leftrightarrow \frac{x}{y} \leq \frac{1}{y} - \frac{1}{y^2} = -\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \leq \frac{1}{4}$

$$P = \frac{x+y}{\sqrt{x^2 - xy + 3y^2}} - \frac{x-2y}{6(x+y)} = \frac{\frac{x}{y} + 1}{\sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)^2 - \frac{x}{y} + 3}} - \frac{\frac{x}{y} - 2}{6\left(\frac{x}{y} + 1\right)}$$

Đặt  $t = \frac{x}{y}$ , điều kiện  $0 < t \leq \frac{1}{4}$

$$P = \frac{t+1}{\sqrt{t^2 - t + 3}} - \frac{t-2}{6(t+1)}$$

Xét  $f(t) = \frac{t+1}{\sqrt{t^2 - t + 3}} - \frac{t-2}{6(t+1)}$  với  $0 < t \leq \frac{1}{4}$

$$f'(t) = \frac{-3t+7}{2\sqrt{(t^2 - t + 3)^3}} - \frac{1}{2(t+1)^2}$$

$$\forall t \in \left(0; \frac{1}{4}\right]: \frac{-3t+7}{2\sqrt{(t^2 - t + 3)^3}} \geq \frac{8\sqrt{5}}{27}, \quad \frac{1}{2(t+1)^2} < \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow f'(t) > 0 \quad \forall t \in \left(0; \frac{1}{4}\right] \Rightarrow f \text{ đồng biến trên } \left(0; \frac{1}{4}\right] \Rightarrow f(t) \leq f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{7+10\sqrt{5}}{30}$$

Vậy  $P_{\max} = \frac{7+10\sqrt{5}}{30}$  khi  $x = \frac{1}{2}, y = 2$

